CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES 1977

MATHEMATIQUES I

I. Le plan est rapporté à un repère orthonormé x'0x, y'0y.

On considère l'ensemble S des applications T qui font correspondre à tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ le point (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$X = \alpha x + \beta y$$
$$Y = \gamma x + \delta y$$

(α, β, γ, δ réels quelconques) et $\alpha\delta - \beta\gamma$ strictement positif.

1 - Montrer que l'ensemble S a une structure de groupe G pour la loi o de composition des applications.

2 - Dans l'ensemble S, étudier les applications particulières T_1 qui transforment un cercle de centre 0 en un autre cercle de centre 0. L'ensemble S_1 des applications T_1 est-il un sous-groupe G_1 de G ?
Montrer que l'ensemble des similitudes de centre 0, données par le rapport de similitude et l'angle de rotation, définit le même sous-groupe.

3 - Soit S_2 le sous-ensemble de S formé des applications T_2 commutant avec toutes les applications T_1 de l'ensemble S_1.

$$\forall T_1 \in S_1 \qquad T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$$

Montrer que le sous-ensemble S_2 est un sous-groupe de G. Comparer S_1 et S_2.

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$: x'0x, y'0y. Toutes les courbes étudiées seront tracées dans ce repère. (On pourra prendre 2 centimètres pour unité).

A1) Etudier les variations de la fonction $y_1(x) = -x - \frac{1}{2}x^2$ et déterminer son maximum. Tracer sa courbe représentative (Γ_1) dans le repère $\mathcal{R}$.
Trouver les intersections de (Γ_1) et des droites d'équation y = 0, y = - 1, y = - 4.

2 - Etudier les variations de la fonction $y_2(x) = -y_1(x) - \frac{1}{2}y_1^2(x)$ et déterminer ses extremums.
Tracer sa courbe représentative (Γ_2) dans le repère $\mathcal{R}$.
Trouver les intersections de (Γ_2) et des droites d'équation y = 0, y = - 1, y = - 4.
Etudier la position relative des courbes (Γ_2) et (Γ_1).

3 - Etudier les variations de la fonction $y_3(x) = -y_2(x) - \frac{1}{2}y_2^2(x)$ et déterminer ses extrémums.
Tracer sa courbe représentative (Γ_3) dans le repère $\mathcal{R}$.

.../...

Trouver les intersections de (Γ_3) et des droites d'équation $y = 0$, $y = -1$, $y = -4$

Etudier la position relative des courbes (Γ_3) et (Γ_2).

II B. On se propose d'étudier la suite récurrente de fonctions :

$y_{n+1}(x) = -y_n(x) - \frac{1}{2} y_n^2(x)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, de courbe représentative (Γ_{n+1}) dans le repère $\mathcal{R}$.

$y_1(x)$ est le premier terme de cette suite.

1 - Quel est le degré du polynôme y_n ? Déterminer les valeurs extrémales de la fonction y_n, en précisant la valeur maximale absolue et les valeurs maximales et minimales relatives. Comment varient ces valeurs extrémales avec l'entier n ?

Montrer que ces valeurs extrémales sont toutes comprises dans l'intervalle $\left[-\frac{5}{8} ; \frac{1}{2}\right]$.

Etudier la position relative des courbes (Γ_n) et (Γ_{n-1})

Déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe (Γ_n) et des droites $y = 0$, $y = -1$, $y = -4$.

Expliquer comment le tracé de la courbe (Γ_n) peut se déduire du tracé de la courbe (Γ_{n-1}).

2 - Montrer que la plus petite racine de $y_n = 0$ décroît, et que la plus grande croît, quand n augmente.

Quand n augmente indéfiniment ces racines tendent chacune vers une limite que l'on calculera.

II C. On considère la suite récurrente de nombres réels :

$u_{n+1} = -u_n - \frac{1}{2} u_n^2$, de premier terme u_0 $\quad (n \in \mathbb{N})$

n augmentant indéfiniment, étudier la limite éventuelle de cette suite.

1 - Quand $-2 \leqslant u_0 \leqslant 1$

2 - quand $u_0 \leqslant -4$ ou $u_0 \geqslant 2$.

3 - quand u_0 est dans l'un des intervalles $]-4 ; -2[$ ou $]1 ; 2[$

II D. On revient à la suite de fonctions y_n étudiée à la seconde partie. Cette suite est-elle convergente ? Si oui, sur quel intervalle ?

La convergence est-elle alors uniforme ?

II E. L'intégrale $\int_{-4}^{+2} y_n(x)\,dx$ a-t-elle une limite quand n augmente indéfiniment ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail